Triangle équilatéraux inscrits sur une hyperbole

thèmes abordés : géométrie du plan, coniques, relation coefficients/racines d'un polynôme.

$\mathcal{P}$ désigne le plan affine euclidien rapport à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, k désigne un réel strictement positif. On note (x,y) le couple de coordonnées d'un point M de $\mathcal{P}$.
Soit (γ) l'hyperbole équilatère d'équation cartésienne $xy=k$.

1. On considère trois points A,B,C de (γ), deux à deux distincts, dont les abscisses sont notées a,b,c respectivement.

1.a Déterminer les coordonnées (α,β) du centre de gravité de G du triangle ABC.

1.b Déterminer les coordonnées (λ,μ) de l'orthocentre H du triangle ABC.
Vérifier que H appartient à (γ).

2. On suppose, dans cette question, que ABC est un triangle équilatéral.

2.a Que peut-on dire de G et H ?

2.b Montrer que a,b,c sont les racines du polynôme $P(X)$ avec $P(X)=X^3-3\lambda X^2-3\frac{k^2}{\lambda^2}X+\frac{k^2}{\lambda}$.

2.c On appelle sommets de (γ) les points d'intersection de (γ) avec la droite d'équation $y=x$.
On suppose que H n'est pas l'un des sommets de (γ).
Montrer que l'intersection du cercle circonscrit au triangle ABC avec (γ) contient un point D distincts de A,B,C. Préciser les coordonnées de D.

3. Soit r un réel non nul et $Q(X)$ le polynôme défini par : $Q(X)=X^3-3rX^2-3\frac{k^2}{r^2}X+\frac{k^2}{r}$.

3.a Déterminer le signe du produit $Q(0)Q(r)$. En déduire que $Q(X)$ admet trois racines réelles deux à deux distinctes et non nulles notées r_1,r_2,r_3.

3.b Soit R_1,R_2,R_3 les points de (γ) d'abscisses respectives r_1,r_2,r_3.
Démontrer que le triangle $R_1R_2R_3$ est équilatéral.

4. Donner une construction géométrique permettant d'obtenir tous les triangles équilatéraux dont les sommets appartiennent à (γ).

Correction

d'après E4A PSI 2001

1.a $A\left|\begin{matrix}a\\k/a\end{matrix}\right.$, $B\left|\begin{matrix}b\\k/b\end{matrix}\right.$, $C\left|\begin{matrix}c\\k/c\end{matrix}\right.$ avec $abc\neq 0$ donc $G\left|\begin{matrix}(a+b+c)/3\\k(ab+bc+ca)/3abc\end{matrix}\right.$.

1.b Par intersections des hauteurs : $H\left|\begin{matrix}-k^2/abc\\-abc/k\end{matrix}\right.$ donc $H\in(\gamma)$.

2.a Pour un triangle équilatéral $G=H$.

2.b a,b,c sont les racines de $P(X)$ avec $P(X)=X^3-\sigma_1X^2+\sigma_2X-\sigma_3$ où $\sigma_1=a+b+c$, $\sigma_2=ab+bc+ca$ et $\sigma_3=abc$.
L'identification des coordonnées de G et H donne :
$\sigma_1=3\lambda$ et $\sigma_2=-3\sigma_3^2/k^2$. Or $\sigma_3=-k^2/\lambda$ donc on parvient au polynôme proposé.

2.c $H\left|\begin{matrix}\lambda\\k/\lambda\end{matrix}\right.$ (avec $\lambda^2\neq k$ car H non sommet de (γ) est le centre du cercle circonscrit dont l'équation est :

$(x-\lambda)^2+\left(y-\frac{k}{\lambda}\right)^2=R^2$ avec $R=HA=HB=HC$.

Les abscisses des points intersections de ce cercle et de (γ) sont les solutions de l'équation :

$(x-\lambda)^2+k^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\lambda}\right)^2=R^2$ soit encore $x^2\lambda^2(x-\lambda)^2+k^2(\lambda-x)^2-\lambda^2x^2R^2=0$.

Cette équation (de degré 4) possède quatre racines (comptées avec multiplicité) parmi lesquels a,b,c. Par relation coefficients racines, on obtient : La quatrième d vérifie $a+b+c+d=2\lambda$ donc $d=2\lambda-(a+b+c)$. Or $\lambda=(a+b+c)/3$ donc $d=2\lambda-3\lambda=-\lambda$.

Finalement $D\begin{vmatrix}-\lambda\\-k/\lambda\end{vmatrix}$ (symétrique de H par rapport à l'origine).

3.a $Q(0)Q(r)<0$.

Si $r>0$ alors $\lim_{-\infty}Q=-\infty$, $Q(0)>0$, $Q(r)<0$ et $\lim_{+\infty}Q=+\infty$.

L'application du théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de racine dans chacun des intervalles $]-\infty,0[$, $]0,r[$ et $]r,+\infty[$.

Si $r<0$, on obtient de manière semblable des racines dans chacun des intervalles $]-\infty,r[$, $]r,0[$ et $]r,+\infty[$.

3.b Les relations coefficients racines d'un polynôme donnent : $r_1+r_2+r_3=3r$, $\frac{r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1}{r_1r_2r_3}=\frac{3}{r}$ et $r_1r_2r_3=-\frac{k^2}{r}$.

Soit G le centre de gravité et H l'orthocentre du triangle $R_1R_2R_3$.

Par les relations précédentes, on a $G\begin{vmatrix}r\\k/r\end{vmatrix}$ et $H\begin{vmatrix}r\\k/r\end{vmatrix}$ et donc $G=H$. Par suite $R_1R_2R_3$ est équilatéral.

4. Partant d'un point $D\begin{vmatrix}d\\k/d\end{vmatrix}$ sur (γ), on considère on symétrique H par rapport à l'origine. L'intersection de (γ) et du cercle de centre H passant par D définit 3 points A,B,C. En effet l'équation définissant les abscisses des points intersection est comme on l'a vu par les calculs précédents une équation de degré 4 de la forme :
$(x-d)Q(x)=0$ avec Q de la forme étudiée en 3.b dont les racines déterminent les abscisses des points A,B,C. Le triangle ABC est alors équilatéral et par l'étude précédente on peut aussi affirmé que tout triangle équilatéral sur (γ) peut être ainsi construit.